Sheaf理論の位相空間への応用について (最近の位相空間論)

児玉, 之宏

数理解析研究所講究録
148巻 1972年 8-19

Sheaf 理論の位相空間への応用について

東京教育大 理　　児玉 之宏

§1. 序

Sheaf 理論が代数幾何，代数的位相幾何，関数論等に巾広い応用面を持つことはよく知られている。この小論では Sheaf が位相空間論にも興味ある応用面を持つことを2方面について述べてみる。その1つはコンパクト化に関することであり，他は次元論に対することである。この方向では多くの興味ある部分が未開発に残っており，この論で述べることは氷山の一角にすぎない。Sheaf についての定義，記号等は Godement [2]，Grothendieck [3] による。この論では Sheaf によってつねに加群の sheaf を意味し，写像はすべて連続であるとする。

§2.

X を位相空間，$\mathcal{A}$ を X 上の sheaf とする。$A \subset X$ について $\mathcal{A}|A$ は $\mathcal{A}$ を A に制限した A 上の sheaf である。また $\mathcal{A}(A)$ は

A上での$\mathcal{A}$へのsectionの作る加群を意味する。$x \in X$について$\mathcal{A}_x$あるいは$(\mathcal{A})_x$は点x上の$\mathcal{A}$のstalkである。X上のsheafのcomplex $\mathcal{A}^* = \{\mathcal{A}^i : i = 0, 1, \cdots\}$: $\mathcal{A}^0 \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\delta} \cdots \to \mathcal{A}^i \to \cdots$, $\delta^2 = 0$, とXの部分集合Aについて, $\mathcal{H}^i(\mathcal{A}^*|A)$はA上のi次cohomology sheafを意味し, $H^i(\mathcal{A}^*|A)$は上のsheafのcomplexから得られる加群のcochain complex : $\mathcal{A}^0(A) \to \mathcal{A}^1(A) \to \cdots \to \mathcal{A}^i(A) \to \cdots$, のi次cohomology群を表わす。また$\mathcal{A}$を係数とするXのi次sheaf cohomology群は$H^i(X;\mathcal{A})$で表わされる。

(2.1) $\mathcal{G}$を各stalkが加群Gであるconstant sheafでありXがパラコンパクト空間ならば, $H^i(X;\mathcal{G})$はGを係数とするXのČech cohomology groupに等しい。(Godement [2])

(2.2) $\mathcal{A}$がX上のinjective sheafで, AがXの閉集合ならば, $\mathcal{A}|A$はA上のsoft sheafである(Grothendieck [3])。

$f : X \to Y$を写像, $\mathcal{A}$をX上のsheaf, $f(\mathcal{A})$で$\mathcal{A}$のfによるdirect imageを表わす。

(2.3) $\mathcal{A}$がinjectiveであれば, $f(\mathcal{A})$はinjectiveである。

$f : X \to Y$をパラコンパクトT_2空間XからYへの閉写像とする。BをYの閉集合, $A = f^{-1}(B)$とおく。つぎの事実はGodement [2], Grothendieck [3], [4]に与えられている。

(2.4) $f(\mathcal{A})|B = f(\mathcal{A}|A)$ (sheafのcategoryでのfunctorとして).

(2.5) $i_f : f(\mathcal{A})(B) \cong \mathcal{A}(A)$.

(2.6) (2.5)より $\mathcal{A}^*$ を X 上の sheaf の complex とすれば，同型対応 $j_f : H^i(f(\mathcal{A}^*)|B) \cong H^i(\mathcal{A}^*|A)$, $i=0,1,2,\cdots$, が成立する。特に B が1点 y から成るとき，$(\mathcal{H}^i(f(\mathcal{A}^*)))_y \cong H^i(\mathcal{A}^*|f^{-1}(y))$.

(2.7) $\mathcal{A}$ を X 上の sheaf，$\mathcal{B}$ を Y 上の sheaf，$h : \mathcal{B} \to f(\mathcal{A})$ を準同形とする。$\mathcal{I}^*$, $\mathcal{J}^*$ をそれぞれ $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ の injective resolution とすれば，$f(\mathcal{I}^*)$ は Y 上の injective sheaf から成る complex であるから((2.3))，準同形 $h^i : \mathcal{J}^i \to f(\mathcal{I}^i)$ が存在して，つぎの可換図形が得られる：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & \mathcal{B} & \to & \mathcal{J}^0 & \to & \mathcal{J}^1 & \to & \cdots & \to & \mathcal{J}^i & \to \cdots \\
 & & \downarrow h & & \downarrow h^0 & & \downarrow h^1 & & & & \downarrow h^i & \\
0 & \to & f(\mathcal{A}) & \to & f(\mathcal{I}^0) & \to & f(\mathcal{I}^1) & \to & \cdots & \to & f(\mathcal{I}^i) & \to \cdots
\end{array}$$

h^i は chain homotopy を除いて unique に定まる。これから Y の閉集合 B, $A = f^{-1}(B)$ について準同形 $h^* : \mathcal{H}^i(\mathcal{J}^*|B) \to \mathcal{H}^i(f(\mathcal{I}^*|A))$, $h^* : H^i(\mathcal{J}^*|B) \to H^i(f(\mathcal{I}^*|A))$ が得られる。このとき (2.2) より $\mathcal{J}^*|B$ は $\mathcal{B}|B$ の soft resolution であるから，$H^i(\mathcal{J}^*|B) = H^i(B : \mathcal{B}|B)$. また (2.5) より $H^i(f(\mathcal{I}^*|A)) \overset{j_f}{\cong} H^i(\mathcal{I}^*|A) = H^i(A : \mathcal{A}|A)$ であるから，準同形 $r(h,f) : H^i(B : \mathcal{B}|B) \to H^i(A : \mathcal{A}|A)$ が得られる。

(2.8) direct image functor は left exact であるから (2.6), (2.7) より $r(1,f) : H^0(B : f(\mathcal{A})|B) \cong H^0(A : \mathcal{A}|A)$.

(2.9) $\mathbb{Z}$ を整数の加群とし $\mathbb{Z}_X$ により各 stalk が $\mathbb{Z}$ である X

上の constant sheaf とする。direct image の定義より monomorphism $h: Z_Y \to f(Z_X)$ が存在する。(2.7) と (2.8) から $\tau(1,f): H^0(Y:f(Z_X)) \cong H^0(X:Z_X)$，また $\tau(h,f)$ は合成写像 $\tau(1,f)h^*: H^i(Y:Z_Y) \to H^i(X:Z_X)$ であり，これは f によって誘導された integral Čech cohomology 群の間の準同形に等しい。

次の様な問題が K. Kuratowski によって与えられた。

(2.10) U と V をユークリッド n 空間 R^n の有界連結開集合とする。もし U と V が同相ならば，$R^n - U$ と $R^n - V$ の連結成分からなる集合の濃度は等しいか？

この問は，M.K. Fort. Jr [1] によって何ら代数的手段を使わずに肯定的に解かれた。E.G. Sklyarenko は sheaf を使用して上記の解を含む美事な定理を与えている。

定義 1. 完全正則空間 X のコンパクト化 αX は，$\alpha X - X$ の各コンパクト連結部分集合が 1 点から成るとき，<u>punctiform コンパクト化</u>といわれる。

定義 2. コンパクト化 αX が<u>完全</u>であるとは，X の任意の開集合 U について $O(U) = \alpha X - \overline{X - U}^{\alpha X}$ とおくと，$Bd_{\alpha X}\, O(U) = \overline{Bd_X U}^{\alpha X}$ が成立つことである。ここで $\overline{}^{\alpha X}$ は αX での閉包を，$Bd_{\alpha X}$ は αX での境界を意味する。

(2.11) αX が完全コンパクト化である必要十分条件は，射影

$\pi : \beta X \to \alpha X$ が monotone なることである。ここで βX は X の Stone-Čech コンパクト化である。

(2.12) X が minimal な完全コンパクト化 μX を持つための必要十分条件は、X が少くとも1つの punctiform コンパクト化を持つことである。このとき μX は maximal な punctiform コンパクト化となる。

(2.11) と (2.12) は E.G. Sklyarenko [10] による。

定理1 (Sklyarenko [12]) X, Y を同相な連結完全正則空間とし、$\alpha X, \gamma Y$ をその punctiform なコンパクト化とする。$\pi : \beta X \to \alpha X$, $\nu : \beta Y \to \gamma Y$ を射影とする。もし π, ν が1次元の integral Čech cohomology 群の間の monomorphism を誘導するならば、任意の同相写像 $f : X \to Y$ は同相写像 $F : \alpha X \to \gamma Y$ に拡張される。

定理1 が Kuratowski の問題 (2.10) に解を与えることは、つぎの様に示される。明らかに $n > 1$ と考えてよい。S^n を n 次元球面とし、$S^n \supset U, V$ と考える。αU を S^n から $S^n - U$ の各連結成分を1点に縮めた空間とし、$h : S^n \to \alpha U$ を商写像とする。h は monotone であるから Vietoris-Begle の定理により、$h^* : H^1(\alpha U) \to H^1(S^n)$ は monomorphism である。(ここで $H^1(\alpha U)$ は integral Čech cohomology 群である。) これより $H^1(\alpha U) = 0$. 同様に γV を S^n から $S^n - V$ の各連結成分を1点に縮めた商空

間とすれば, $H^1(\gamma V)=0$. αU と γV は U と V の punctiform コンパクト化であるから, 定理1により任意の同相写像 $f: U\to V$ は同相写像 $\bar{f}:\alpha U\to\gamma V$ に拡張される. これより集合 $\alpha U - U$ と $\gamma V - V$ の濃度は等しい, すなわち $S^n - U$ と $S^n - V$ の連結成分からなる集合の濃度は等しい.

(定理1の証明). (2.11)と(2.12)より π と ν が monotone であることをいえばよい. π が monotone であることを示す. $Z_{\beta X}$ の direct image を考える. 各 $x\in\alpha X$ について stalk $(f(Z_{\beta X}))_x$ は (2.6) より $H^0(\pi^{-1}(x): Z_{\beta X}|\pi^{-1}(x))$ であるから, 後者の群が Z と同形であることをいえばよい. これから $h: Z_{\alpha X}\to f(Z_{\beta X})$ を natural monomorphism としたとき h の同形をいえばよい. 正規列: $0\to Z_{\alpha X}\xrightarrow{h}\pi(Z_{\beta X})\to\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X}\to 0$ は正規列: $0\to H^0(\alpha X: Z_{\alpha X})\xrightarrow{h_0^*}H^0(\alpha X:\pi(Z_{\beta X}))\longrightarrow H^0(\alpha X:\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X})\to H^1(\alpha X: Z_{\alpha X})\xrightarrow{h_1^*}H^1(\alpha X:\pi(Z_{\beta X}))\longrightarrow H^1(\alpha X:\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X})$ を誘導する. $\alpha X,\beta X$ は連結であるから, (2.9)より $\gamma(1,f)h_0^*: H^0(\alpha X: Z_{\alpha X})\to H^0(\beta X: Z_{\beta X})$ は同形であり h_0^* は同形となる. また $\gamma(1,f)h_1^*$ は假定より monomorphism であるから, h_1^* は monomorphism となる. これから $H^0(\alpha X:\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X})=0$ となる. この群は αX 上の $\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X}$ への section の加群に等しい. αX が punctiform コンパクト化であり, $x\in X$ について stalk $(\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X})_x = 0$ であるから, $\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X}=0$ が得られる. これから h は

同型対応となる。

Sklyarenko [11] は更に次の様な興味ある定理を証明した。

定理 2. αX, γX を X の punctiform コンパクト化とする。X の点を動かさない写像 $f:\alpha X\to\gamma X$ が存在して，$f^*:H^i(\gamma X)\to H^i(\alpha X)$ が $i=0$ で同型，$i=1$ で monomorphism ならば，f は同相写像である。

定理 3. X が punctiform コンパクト化をもてば，射影が同型対応 $H^0(\beta X)\cong H^0(\alpha X)$ を誘導する様な任意の punctiform コンパクト化 αX の weight はすべて等しい。

次元論において，sheaf 理論が重大な役割を演ずることは [5], [6], [7], [8], [9] 等でよく知られている。この方面で Zarelua [15] と Skordev [13], [14] は興味ある結果を得た。今後すべての空間はパラコンパクト T_2 であるとする。$\mathcal{A}$ を空間 X 上の sheaf，U を X の開集合とする。$\mathcal{A}_U$ を次の様な $\mathcal{A}$ の部分 sheaf とする；$(\mathcal{A}_U)_x=\mathcal{A}_x,\ x\in U$；$(\mathcal{A}_U)_x=0,\ x\notin U$.

定義 2. $D(X:\mathcal{A})=\max\{n:$ ある開集合 $U\subset X$ について $H^n(X:\mathcal{A}_U)\neq 0\}$.

(2.13) $\dim X=D(X:Z_X)$ （[9: Appendix] 参照）.

(2.14) $D(X:\mathcal{A})\leq n \Leftrightarrow \mathcal{A}$ の長さ $n+1$ の soft resolution：
$0\to\mathcal{A}\to\mathcal{C}^0\to\mathcal{C}^1\to\cdots\to\mathcal{C}^n\to 0$ が存在する。

(2.15) $f:X\to Y$ が閉写像で $\dim f=0$ ならば，$\gamma(1,f)$：

$H^i(Y:f(\mathcal{A}))\cong H^i(X:\mathcal{A})$, $i=0,1,\cdots$. また $D(Y:f(\mathcal{A}))\leq D(X:\mathcal{A})$。ここで $\dim f=\max\{\dim f^{-1}(y): y\in Y\}$.

A. Zarelua [15] は (2.14) を更に精しく分析するために、次の概念を導入した。

定義3. sheaf の system $\Sigma=\{U_\lambda,\mathcal{A}_\lambda,\gamma_\mu^\lambda\}$ は X 上の <u>partial inductive system</u> である：(1) $\{\lambda\}$ は directed set で $\{U_\lambda\}$ は X の開被覆である，(2) $\mathcal{A}_\lambda$ は U_λ 上の sheaf，(3) $\lambda\geq\mu$ ならば $U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ で γ_λ^μ は準同型 $\mathcal{A}_\mu|U_\lambda\cap U_\mu\to\mathcal{A}_\lambda|U_\lambda\cap U_\mu$ であり，$\lambda_n\geq\lambda_{n-1}\geq\cdots\geq\lambda_1$ ならば $U_{\lambda_1}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}\neq\phi$ で $\gamma_{\lambda_n}^{\lambda_1}=\gamma_{\lambda_n}^{\lambda_{n-1}}\cdots\gamma_{\lambda_2}^{\lambda_1}$ が成立つ，(4) $x\in U_{\lambda_1}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}$ ならば，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\leq\mu$ が存在して $x\in U_\mu\cap U_{\lambda_1}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}$ となる。更に Σ が，(5) 各 γ_μ^λ が monomorphism で，$U_{\lambda_1}\cap U_{\lambda_2}\neq\phi$ となる λ_1,λ_2 について $\lambda_1,\lambda_2\leq\mu$, $U_\mu=U_{\lambda_1}\cap U_{\lambda_2}$ となる μ が存在する，を充すならば，Σ は<u>正則</u>といわれる。

partial inductive system $\Sigma=\{U_\lambda,\mathcal{A}_\lambda,\gamma_\mu^\lambda\}$ が与えられたとき，$x\in X$ について $\Lambda_x=\{\lambda: x\in U_\lambda\}$ とおけば，$\{(\mathcal{A}_\lambda)_x:\gamma_\mu^\lambda,\ \lambda\in\Lambda_x\}$ は加群の inductive system である。$\mathcal{A}_x=\varinjlim\{(\mathcal{A}_\lambda)_x\}$，$\mathcal{A}_\infty=\bigcup_{x\in X}\mathcal{A}_x$ とおく。presheaf から sheaf を作ると同様の手続によって，$\mathcal{A}_\infty$ に位相を導入すれば $\mathcal{A}_\infty$ は X 上の sheaf となる。$\mathcal{A}_\infty$ を Σ の limit とよぶ。

定義4. X の開集合 U 上の sheaf $\mathcal{A}$ について，X の $\mathcal{A}$ に関

する<u>相対次元</u> $r(X:\mathcal{A}) \le n$ とは，U に含まれる X の任意の閉集合 F について $D(F:\mathcal{A}) \le n$ となることである。

(2.16)　$\Sigma = \{\mathcal{A}_\lambda\}$ を X 上の sheaf の正則な partial inductive system とする。各 $\mathcal{A}_\lambda$ について $r(X:\mathcal{A}_\lambda) \le n$ ならば，Σ の limit $\mathcal{A}$ に対して $D(X:\mathcal{A}) \le n$ である。

$f: X \to Y$ を finite to one（各 $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ が高々有限個の点からなる）閉写像とする。$n \ge 0$ について $X_n = \cup\{f^{-1}(y):$ $f^{-1}(y)$ が少くとも n 個の点からなる$\}$ とおく。X の部分集合 M について，$rd_X M = \max\{\dim F : F$ は M に含まれる X の閉集合$\}$ とする。$M = \phi$ のとき $rd_X M = -\infty$ とおく。

(2.17)　$f: X \to Y$ が finite-to-one 閉写像ならば，次の様な sheaf の正規列 $\mathcal{G}^i$, $i=1,2,\cdots$，が存在する; $0 \to Z_Y \to f(Z_X) \to \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^2 \to \cdots$.

(2.16) と (2.17) より spectral sequence を計算することによって次の興味ある定理が得られる。

定理 4.　$f: X \to Y$ が finite to one 閉写像ならば $\dim Y \le \max_{0 \le n < \infty} \{rd_X X_{n+1} + n\}$. 特に各 $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ が高々 $n+1$ 個の点から成る場合は，$\dim Y \le \dim X + n$ となる。

Zarelua [15] はまた，(2.17) を使用してホモロジー多様体に関して Chernavskii の結果を含む定理を証明している。

次の定理は Skordev [13], [14] によって与えられた。これ

らは Hurewicz の結果の精密な一般化である。

定理5. $f: X \to Y$ を $\dim f = 0$ となる閉写像とし，$\dim Y \geq \dim X + k$ ならば，$rd_Y Y_{s+1} \geq \dim Y - s$，$s = 0, 1, \cdots, k$，が成立する。

定理6. $f: X \to Y$ を閉写像とし，$\dim Y \geq \dim X + k$ とする。$g \geq 0$ について $M_g = \{y \in Y : \dim f^{-1}(y) \geq g\}$ とおく。ある $l \geq 0$ について，$\max_{g>0} (rd_Y M_g + g) \leq \dim Y - l$ が成立すれば，任意の $s \leq \min(l-1, k)$ に対して $rd_Y Y_{s+1} \geq \dim Y - s$ であり，更に $l \leq k$ ならば $rd_Y Y_{l+1} \geq \dim Y - l - \dim f$ が成立つ。

定理7. $f: X \to Y$ を閉写像とし，$\dim Y \geq \dim X + 1$ とする。このとき $rd_Y Y_2 \geq \dim Y - \dim f - 1$ が成立する。もし $rd_Y Y_2 = \dim Y - \dim f - 1$ が成立すれば，$rd_Y M_1 = rd_Y M_2 = \cdots = rd_Y M_{\dim f} = rd_Y Y_2$ となる。ここで M_g，$g = 1, \cdots, \dim f$，は定理6の様に定義される。

問題1. Sklyarenko の定理は「適当な條件をもつ写像：$X \to Y$ が $\alpha X \to \gamma Y$ に拡張出来る」という形で一般化出来るか？例えば，与えられた写像 $f: X \to Y$ が perfect かつ monotone である場合はどうか？

問題2. 上記の次元に関する定理(4-7)に集合論的な証明が与えられるか？

次の問題の解決には，sheaf が非常に有効であるように思われる。（[6]，[7]，[9] 参照。）

問題 3. 次の様な整数 n は存在するか？ すべての完備な可分距離空間 X について，$\dim(X \times X) \geq 2\dim X - n$ が成立する。（X がコンパクト空間ならば $n = 1$ となる。）

問題 4. $\dim(X \times X) = 2\dim X$ となる可分距離空間は？

参考文献

[1] M.K. Fort, Jr., The complements of bounded, open, connected subsets of Euclidean space, Bull. Acad. Polonaise des Sciences, vol. 9 (1961), 457−460.

[2] R. Godement, Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, Hermann, Paris (1958).

[3] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algebre homologie, Tohoku Math. J., 9(1957), 119−221.

[4] A. Grothendieck, Éléments de Géométrie Algébrique. III, Publ. Math. IHES, 11(1963).

[5] Y. Kodama, A remark on the cohomology group and the dimension of product spaces, J. of Math. Soc. Japan, 21(1969), 54−57

[6] Y. Kodama, On subset theorems and the dimension products, Amer. J. of Math., 91(1969), 486−498.

[7] V. I. Kuzminov, Test spaces with respect to cohomological dimension of paracompact spaces, Doklady Acad. Nauk SSSR, 181 (1968), 538-541.

[8] V. I. Kuzminov, Homological dimension theory, Uspehi Mat. Nauk, 23, 5(143)(1968), 3-49.

[9] K. Nagami, Dimension theory, Academic Press (1970).

[10] E. G. Sklyarenko, Some questions in the theory of bicompactifications, Izv. Akad. Nauk SSSR., 26(1962), 427-452.

[11] E. G. Sklyarenko, Bicompactifications with punctiform boundaries and cohomology groups, Izv. Akad. Nauk SSSR, 27 (1963), 1165-1180.

[12] E. G. Sklyarenko, Some applications of the theory of sheaves in general topology, Uspehi Mat. 19.6(120)(1964), 41-62.

[13] G. S. Skordev, On dimension raising mappings, Mat. Zam. 7.6(1970), 697-705.

[14] G. S. Skordev, On resolutions of continuous mappings, Mat. Sb. 82(124)(1970), 532-550.

[15] A. V. Zarelua, Finite to one mappings of topological spaces and cohomology manifolds, Sibirisk Mat. J., 10(1969), 64-92.